



PROVA OIM 2024

Nível 2 – 2ª Fase

Questão 1

Nos Jogos Olímpicos de Paris 2024, as provas de várias modalidades do atletismo acontecem no *Stade de France*, numa pista oval de 400m de extensão, composta por duas retas paralelas e duas curvas semicirculares de mesmo raio, sendo 200 metros de reta e 200 metros de curva. Uma pista oficial é constituída por no mínimo oito raiais, numeradas de dentro para fora, de modo que a raia mais interna é a número “1”, e a extensão da pista é definida por esta raia. Em todas as corridas até e inclusive 400m, cada competidor realiza a prova em uma raia previamente definida, que possui largura de 1,25m e são divididas por linhas de 5 cm de largura.

- a) Determine o raio da curva que compõe a pista, supondo que a extensão seja medida pela raia um, após a linha interna de marcação dessa raia. Considere $\pi = 3,14$.
- b) Como a linha de chegada para todas as competições de pista é única, para as provas que possuem um trecho de corrida na curva, é necessário o escalonamento das linhas de partida para compensar as diferenças de extensão das respectivas curvas. Em uma corrida de 400m, determine a quantos metros à frente da largada da raia 1 deve estar a largada da raia 8, supondo que a largada ocorra em uma parte reta da pista.

Questão 2

Cinco amigas - Alice, Beatriz, Clara, Diana e Eva - foram a uma festa e cada uma delas usava um chapéu de uma cor diferente: vermelho, azul, verde, amarelo e roxo. Nenhuma delas sabia a cor do próprio chapéu, mas podia ver a cor dos chapéus das outras amigas. Durante a festa, elas fizeram as seguintes afirmações:

Alice disse: Eu vejo que Beatriz não está usando o chapéu azul.

Beatriz disse: Clara está usando o chapéu verde.

Clara disse: Diana está usando o chapéu vermelho.

Diana disse: Eva não está usando o chapéu amarelo.

Eva disse: Alice está usando o chapéu roxo.

Ao considerar-se que exatamente uma dessas afirmações é verdadeira, não existe uma única possibilidade para definir a cor do chapéu de cada uma das cinco amigas.

- a) Determine de quantas maneiras diferentes é possível saber exatamente a cor do chapéu de cada amiga.
- b) Para cada caso em que esse problema possui solução, determine quem fala a verdade e a cor do chapéu das cinco amigas.

Questão 3

Um número é chamado perfeito se ele for igual à soma de seus divisores “próprios”, ou seja, aqueles que excluem o próprio número. Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Euclides descobriu um padrão para os números perfeitos. Ele provou que sempre que $2^p - 1$ for um número primo, o número $2^{p-1}(2^p - 1)$ será perfeito.

- a) Determine dois números perfeitos maiores que 28.
- b) Para o primeiro número perfeito maior que 28, escreva-o como a soma de seus divisores próprios.

Questão 4

Carlos Drummond de Andrade nasceu em Itabira, localizada no interior de Minas Gerais, em 31 de outubro de 1902. Encontrou na sutileza e tranquilidade de seu dia-a-dia a matéria-prima poética que mais tarde iria consagrá-lo como um dos poetas mais influentes do século XX. O autor escreveu incontáveis contos e crônicas e foi um dos precursores do movimento Modernista no Brasil. As obras de Drummond podem ser classificadas em poesia e prosa, a seguir são apresentadas algumas delas:

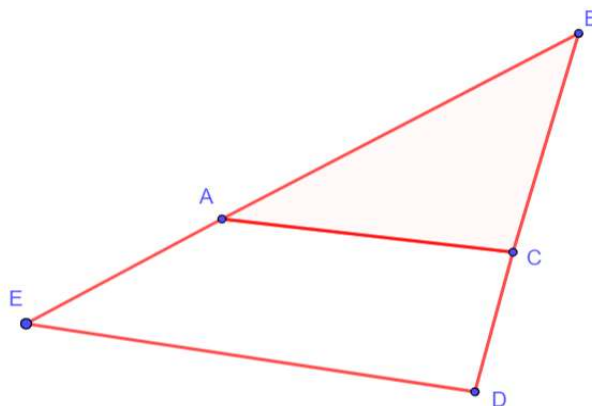
- Alguma Poesia (Poesia)
- Brejo das Almas (Poesia)
- A Rosa do Povo (Poesia)
- Contos de Aprendiz (Prosa)
- Sentimento do Mundo (Poesia)
- Fala, amendoeira (Prosa)
- Poesias (Poesia)
- Passeios na Ilha (Prosa)
- A Bolsa & a Vida (Prosa)

(Adaptado de: <https://blog.estantevirtual.com.br/2022/02/21/10-obras-essenciais-de-carlos-drummond-de-andrade/>)

Suponha que, dentre as obras de Carlos Drummond de Andrade citadas no texto, uma pessoa deseje escolher 3 de poesia e 3 de prosa. De quantas maneiras a escolha das obras pode ser feita?

Questão 5

Carlos e Drummond são dois vizinhos que possuem lotes adjacentes, representados na imagem pelos polígonos ABC e $ACDE$, respectivamente.



Algumas medidas dos lotes são dadas por $\overline{AB} = 25\text{m}$, $\overline{BC} = 18\text{m}$, $\overline{AE} = 11\text{m}$ e $\overline{CD} = 9\text{m}$. Se Carlos sabe que seu lote tem 175 m^2 , qual a área do lote de Drummond?