



PROVA OIM 2024

Nível 1 – 2ª Fase

Questão 1

Cinco amigas - Alice, Beatriz, Clara, Diana e Eva - foram a uma festa e cada uma delas usava um chapéu de uma cor diferente: vermelho, azul, verde, amarelo e roxo. Nenhuma delas sabia a cor do próprio chapéu, mas podia ver a cor dos chapéus das outras amigas. Durante a festa, elas fizeram as seguintes afirmações:

Alice disse: Eu vejo que Beatriz não está usando o chapéu azul.

Beatriz disse: Clara está usando o chapéu verde.

Clara disse: Diana está usando o chapéu vermelho.

Diana disse: Eva não está usando o chapéu amarelo.

Eva disse: Alice está usando o chapéu roxo.

Ao considerar-se que exatamente uma dessas afirmações é verdadeira, não existe uma única possibilidade para definir a cor do chapéu de cada uma das cinco amigas.

- Determine de quantas maneiras diferentes é possível saber exatamente a cor do chapéu de cada amiga.
- Para cada caso em que esse problema possui solução, determine quem fala a verdade e a cor do chapéu das cinco amigas.

Questão 2

O *skate street* é uma modalidade esportiva que foi incluída nas Olimpíadas de Tóquio em 2021 e está em sua segunda edição nas Olimpíadas de Paris. A skatista brasileira Rayssa Leal foi medalhista de Prata e de Bronze, respectivamente, em cada uma das edições. De acordo com as regras da competição, os atletas dessa modalidade fazem dois tipos distintos de apresentação: primeiro são dadas duas voltas livres de 45 segundos para utilizar todo o espaço de prova para fazer o máximo de manobras dentro desse tempo, e cinco manobras isoladas. A nota final é composta pela soma das notas da melhor volta livre e das duas melhores manobras isoladas. Veja na tabela a nota das três medalhistas da modalidade na competição que aconteceu no dia 28/07/2024.

Atleta	Volta Livre	Manobra 1	Manobra 2	Total
Coco Yoshizawa (JPN)	86,80	96,49	89,46	272,75

Liz Akama (JPN)	89,26	92,62	84,07	265,95
Rayssa Leal (BRA)	71,66	92,88	88,83	253,37

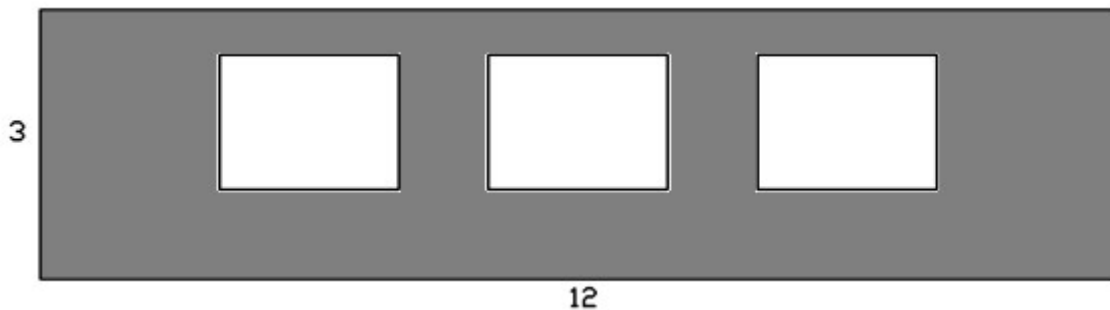
Caso a nota final de cada atleta fosse dada pela soma da volta livre com a média das manobras, qual é a nota mínima que Rayssa Leal deveria ter obtido em sua volta livre para garantir a medalha de ouro em Paris 2024?

Questão 3

A mãe de Marília teve um novo bebê, chamado Rafael. Quando a idade de Marília for igual ao dobro da idade de Rafael, a soma das suas idades será igual a 9. Qual era a idade de Marília quando Rafael nasceu?

Questão 4

Ouro Preto, localizada no estado de Minas Gerais, é uma cidade histórica brasileira, famosa por sua arquitetura colonial e pelos casarões e igrejas decorados com azulejos e ouro. Em um desses casarões, há uma parede retangular feita de azulejos quadrados. Conforme a figura, a parede tem 12 metros de comprimento e 3 metros de altura, com três janelas retangulares alinhadas ao centro e espaçadas 1 metro umas das outras. As janelas medem 2 metros de largura por 1,5 metros de altura, e a parte inferior está localizada a 1 metro do chão. Com base nessas informações, faça o que se pede:



- Qual é a área total da parede?
- É possível cobrir toda a parede sem deixar espaços vazios, sobras ou quebrar os azulejos, ao utilizar azulejos quadrados de 60 cm de lado? Justifique sua resposta.
- Determine todas as medidas possíveis para um azulejo quadrado cobrir a parede sem deixar espaços vazios, sobras ou quebras.
- Calcule o número de azulejos necessários para cobrir a parede, utilizando o azulejo com a maior dimensão possível, mencionadas na letra c.

Questão 5

Um número é chamado perfeito se ele for igual à soma de seus divisores “próprios”, ou seja, aqueles que excluem o próprio número. Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Euclides descobriu um padrão para os números perfeitos. Ele provou que sempre que $2^p - 1$ for um número primo, o número $2^{p-1}(2^p - 1)$ será perfeito.

- a) Mostre que a afirmativa anterior é verdadeira para $p = 2$ e $p = 3$.
- b) Determine um número perfeito maior que 28.

